

# 几类积图的Sombor指标

阿丽米热·吐尔洪, 买吐肉孜·买司地克\*, 刘兆志  
(新疆师范大学 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

**摘要:** Sombor指标是由Gutman在化学图论中引入的一种基于顶点度的新拓扑指标。文章讨论了路 $P_n$ 与扇图 $F_m$ 、轮图 $W_m$ 、轮图 $W_n$ 与扇图 $F_m$ 、轮图 $W_m$ 、扇图 $F_n$ 与扇图 $F_m$ 以及棒棒糖图 $N_{a,b}$ 、杠铃图 $D_{a,b,c}$ 和风筝图 $L_{a,b}$ 与完全图 $K_n$ 的笛卡尔积的Sombor指标,还研究了完全图、路、圈作直积、笛卡尔积、强积的Sombor指标,得出其确切的指标值以及关于积图的Sombor指标的关系式。

**关键词:** Sombor指标; 笛卡尔积; 直积; 强积

**中图分类号:** O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-9659(2024)02-0017-09

图的拓扑指标的研究是图论应用研究的一个热门领域,拓扑指标广泛应用于化学、物理等应用学科,它利用图的各项特性来描述及预测模型可能有的信息<sup>[1]</sup>。特别是分子拓扑指标,广泛应用于众多领域,在生物医学中,分子拓扑指标的值可以根据实际试验得出的相关结论预先确定,然后找到与指标值匹配的分子图,合成与分子图匹配的化合物。利用一些应用统计技术,通过相对应的系数、标准偏差等统计指标反映分子拓扑指标与分子物理化学性质之间的关联性,建立拓扑指标与物理化学性质之间的关系。通过研究拓扑指标可以反映化合物的内部结构,拓扑指标可用于确定化学晶体中的异构体。目前,科学家们越来越关注分子拓扑指标在制药过程中的应用。拓扑指标的种类越来越多,经常用的拓扑指标有第一、第二Zagreb指标<sup>[2-3]</sup>、Wiener指标<sup>[4]</sup>、Harary指标<sup>[5]</sup>等。目前,这些指标的研究是化学图论中比较热门的研究领域,文章将重点讨论一种基于顶点度的新的拓扑指标:Sombor指标<sup>[6]</sup>。

文章图 $G$ 是具有顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 的简单图,记图 $G = (V(G), E(G))$ 。图 $G$ 中,边数记为 $e(G)$ ,点数(阶)记为 $v(G)$ , $\Delta_c$ 表示图 $G$ 的最大度, $\delta_c$ 表示图 $G$ 的最小度。 $d_c(v_i)$ 表示点 $v_i$ 在图 $G$ 中的度数, $P_t$ 表示阶为 $t$ 的路, $C_t$ 表示阶为 $t$ 的圈, $K_t$ 表示阶为 $t$ 的完全图。

Sombor指标的灵感来自于边的度半径的几何解释,对于图 $G$ 的Sombor指标 $SO(G)$ 定义为

$$SO(G) = \sum_{v_i, v_j \in E(G)} \sqrt{(d_c(v_i))^2 + (d_c(v_j))^2}$$

Sombor指标自提出以来,学者们取得了很多新的成果。Singh等人主要研究了 $m$ -分裂图和正则图的 $m$ -影子图的Sombor指标<sup>[7]</sup>;Cruz等人确定了至多有三个分支顶点的树的Sombor指标的极值<sup>[8]</sup>;Tamás等人得出了Sombor指标的一些界,并通过利用已有的结果建立了附加界,刻画出了新的图,它具有最大的Sombor指标,并提出了一个关于高圈度图的最大Sombor指标的猜想<sup>[9]</sup>;Milovanovic等人确定了有关Sombor指标的一些新的界以及它们与其他基于顶点度的指标关系,证明了Sombor指标的两个Nordhaus-Gaddum型不等式<sup>[10]</sup>;Cruz等人用Sombor指标在连通的化学图、化学树和六边形系统上刻画图的极值<sup>[11]</sup>。这种新的拓扑指标引起了化学图论研究人员的兴趣。

[收稿日期] 2023-08-08

[修回日期] 2023-10-29

[基金项目] 国家自然科学基金项目(11961070);新疆少数民族科技人才特殊培养计划科研项目(2022D03002)。

[作者简介] 阿丽米热·吐尔洪(1998-),女,硕士研究生,主要从事组合图论方面研究,E-mail:3189957608@qq.com.

\* [通讯作者] 买吐肉孜·买司地克(1979-),男,副教授,主要从事组合图论方面研究,E-mail:metrose@163.com.

一些特殊简单图的笛卡尔积的拓扑指标被众多学者研究。扇图和轮图的笛卡尔积在各种化合物的分析过程中具有重要作用<sup>[12]</sup>,因此研究各类图的笛卡尔积图的拓扑指标对各方面应用有重要的意义<sup>[13]</sup>。文章讨论了几类图的笛卡尔积、直积、强积的Sombor指标,并得出相关结论。

Sombor指标与图的顶点度具有直接的联系,根据所要研究的图的结构特点,可以先通过观察一类图顶点较少的情况,再将其顶点特征推广到任意顶点数的情况,给出对应图边集的划分,最后总结出相应的结论。

**定义 1<sup>[14]</sup>** 笛卡尔积:设  $G$  和  $H$  是两个简单图,定义为:  $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ ,若顶点  $(u_1, v_1)$  与顶点  $(u_2, v_2)$  相邻当且仅当  $u_1 = u_2$  且  $v_1 v_2 \in E(H)$  或  $v_1 = v_2$  且  $u_1 u_2 \in E(G)$  (图1)。

**定义 2<sup>[15]</sup>** 直积:设  $G$  和  $H$  是两个简单图,定义为:  $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ ,若顶点  $(u_1, v_1)$  与顶点  $(u_2, v_2)$  相邻,当且仅当  $u_1 u_2 \in E(G)$  且  $v_1 v_2 \in E(H)$  (图2)。

**定义 3<sup>[16]</sup>** 强积:设  $G$  和  $H$  是两个简单图,定义为:  $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$ ,若顶点  $(u_1, v_1)$  与顶点  $(u_2, v_2)$  相邻当且仅当  $u_1 u_2 \in E(G)$ , 且  $v_1 v_2 \in E(H)$ , 或  $u_1 = u_2$  且  $v_1 v_2 \in E(H)$  或  $v_1 = v_2$  且  $u_1 u_2 \in E(G)$  (图3)。

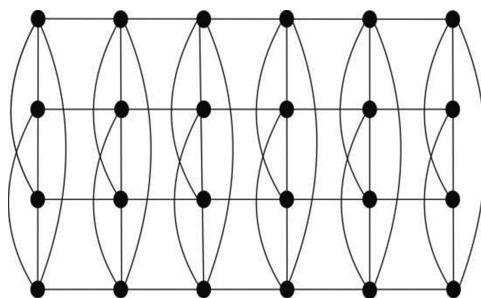


图1 完全图  $K_4$  与路  $P_6$  的笛卡尔积  $K_4 \square P_6$

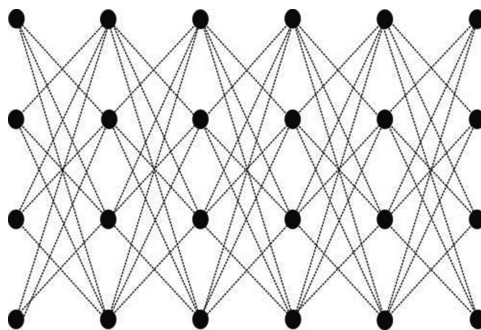


图2 完全图  $K_4$  与路  $P_6$  的直积  $K_4 \times P_6$

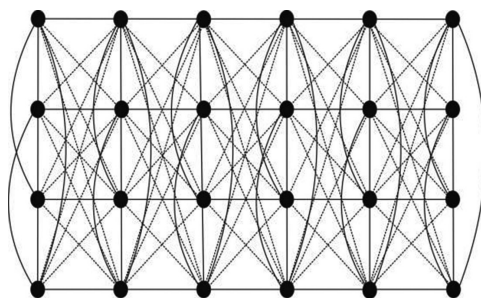


图3 完全图  $K_4$  与路  $P_6$  的强积  $K_4 \boxtimes P_6$

**定义 4<sup>[17]</sup>** 轮图:  $W_n = C_{n-1} + v_1$ , 其中  $C_{n-1}$  表示为  $n-1$  阶的圈。设  $G = W_n$  记轮心为  $v_1$ , 其他顶点依次标号为  $v_2, v_3, \dots, v_n$ ;  $e_i = v_1 v_i, i = 2, 3, \dots, n$ ;  $e'_i = v_i v_{i+1}, i = 2, 3, \dots, n-1$ ;  $e'_n = v_n v_2$  (图4)。

**定义 5<sup>[17]</sup>** 扇图:  $F_n = P_{n-1} + v_1$ , 其中  $P_{n-1}$  表示为  $n-1$  阶的路,  $v_1$  为一个孤立点。设  $G = F_n$ , 记扇心为  $v_1$ , 其他顶点依次标号为  $v_2, v_3, \dots, v_n$ ;  $e_i = v_1 v_i, i = 2, 3, \dots, n$ ;  $e'_i = v_i v_{i+1}, i = 2, 3, \dots, n-1$ 。

**定义 6** 风筝图:  $L_{a,b}$  表示将一个  $b+1$  阶路  $P_{b+1}$  连接在  $a$  阶完全图  $K_a$  上 (图5)。

定义7 棒棒糖图:  $N_{a,b}$  表示将一个  $b+1$  阶路  $P_{b+1}$  连接在  $a$  阶圈  $C_a$  上(图6)。

定义8 杠铃图: 由两个互不相交的  $a$  阶圈  $C_a$ ,  $b$  阶圈  $C_b$  和一个  $b+1$  阶路  $P_{b+1}$  ( $b \geq 1$ ), 其中这两个圈  $C_a$  和  $C_b$  通过  $P_{b+1}$  连接, 由  $D_{a,b,c}$  表示(图7)。

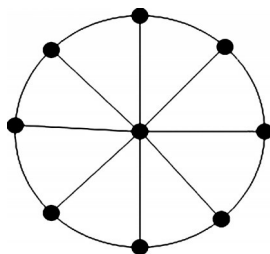


图4 轮图  $W_9$

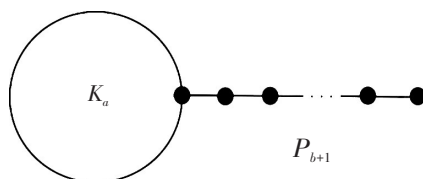


图5 风筝图  $N_{a,b}$

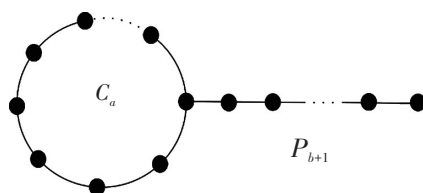


图6 棒棒糖图  $L_{a,b}$

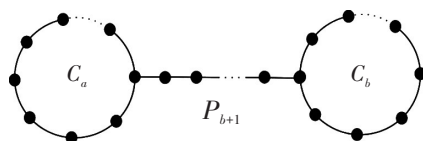


图7 杠铃图  $D_{a,b,c}$

## 1 路、扇图、轮图的笛卡尔积的 Sombor 指标

本章将讨论不同阶的路、轮图、扇图之间作笛卡尔积的 Sombor 指标, 并得出确切的指标值。

定理1 图  $G = P_n \square W_m$  的 Sombor 指标为

$$SO(G) = (11mn - 9n - 20m + 14)\sqrt{2} + 2\sqrt{2m^2 + 2m + 1} \\ + (n - 2)(m - 1)\sqrt{m^2 + 2m + 26} + 2(m - 1)\sqrt{41} + 2(m - 1)\sqrt{m^2 + 16}$$

证明  $v(G) = mn$  和  $e(G) = 3mn - m - 2n$ . 图  $G$  的最小度  $\delta_c = 4$ , 最大度  $\Delta_c = m + 1$ , 图  $G$  有 2 条边连接最大度点与  $m$  度点,  $(n - 2)(m - 1)$  条边连接最大度点与 5 度点,  $(2n - 5)(m - 1)$  条边连接 5 度点,  $2(m - 1)$  条边连接最小度点和 5 度点,  $2(m - 1)$  条边连接最小度点,  $2(m - 1)$  条边连接最小度点与  $m$  度点,  $(n - 3)$  条边连接最大度点, 因此能得出图  $G$  的 Sombor 指标。如下所示:

$$SO(G) = 2\sqrt{(\Delta_c(v_i))^2 + m^2} + (n - 2)(m - 1)\sqrt{(\Delta_c(v_i))^2 + 5^2} + (2n - 5)(m - 1)\sqrt{5^2 + 5^2} \\ + 2(m - 1)\sqrt{(\delta_c(v_i))^2 + 5^2} + 2(m - 1)\sqrt{(\delta_c(v_i))^2 + (\delta_c(v_j))^2} + 2(m - 1)\sqrt{(\delta_c(v_i))^2 + m^2} \\ + (n - 3)\sqrt{(\Delta_c(v_i))^2 + (\Delta_c(v_j))^2}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{(m+1)^2 + m^2} + (n-2)(m-1)\sqrt{(m+1)^2 + 5^2} + (2n-5)(m-1)\sqrt{5^2 + 5^2} \\
&\quad + 2(m-1)\sqrt{4^2 + 5^2} + 2(m-1)\sqrt{4^2 + 4^2} + 2(m-1)\sqrt{4^2 + m^2} + (n-3)\sqrt{(m+1)^2 + (m+1)^2} \\
&= 2\sqrt{2m^2 + 2m + 1} + (n-2)(m-1)\sqrt{m^2 + 2m + 26} + 5(2n-5)(m-1)\sqrt{2} + 2(m-1)\sqrt{41} \\
&\quad + 8(m-1)\sqrt{2} + 2(m-1)\sqrt{16 + m^2} + (n-3)(m+1)\sqrt{2} \\
&= (11mn - 9n - 20m + 14)\sqrt{2} + 2\sqrt{2m^2 + 2m + 1} + (n-2)(m-1)\sqrt{m^2 + 2m + 26} \\
&\quad + 2(m-1)\sqrt{41} + 2(m-1)\sqrt{m^2 + 16}
\end{aligned}$$

**定理2** 图  $G = P_n \square F_m$  的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned}
SO(G) &= (11mn - 26n - 20m + 26)\sqrt{2} + 2\sqrt{2m^2 + 2m + 1} + 2(n-2)\sqrt{m^2 + 2m + 17} + 4\sqrt{m^2 + 9} \\
&\quad + 2(m+n-5)\sqrt{41} + 2(m-3)\sqrt{16 + m^2} + (mn - 3n - 2m + 6)\sqrt{m^2 + 2m + 26} + 40
\end{aligned}$$

**证明**  $v(G) = mn$  和  $e(G) = 3mn - m - 3n$ . 图  $G$  的最小度  $\delta_c = 3$ , 最大度  $\Delta_c = m + 1$ , 图  $G$  有 2 条边连接最大度点与  $m$  度点,  $2(n-2)$  条边连接最大度点与 4 度点,  $(n-3)$  条边连接最大度点, 8 条边连接最小度点和 4 度点, 4 条边连接最小度点和  $m$  度点,  $2(m+n-7)$  条边连接 4 度点,  $2(m+n-5)$  条边连接 4 度点与 5 度点,  $(2mn - 5m - 7n + 17)$  条边连接 5 度点,  $2(m-3)$  条边连接  $m$  度点和 4 度点,  $(mn - 3n - 2m + 6)$  条边连接最大度点和 5 度点, 因此能得出图  $G$  的 Sombor 指标。

**定理3** 图  $G = W_n \square W_m$  的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned}
SO(G) &= (n-1)\sqrt{(n+m-2)^2 + (m+2)^2} + (m-1)\sqrt{(n+m-2)^2 + (n+2)^2} \\
&\quad + (n-1)(m-1)\left(\sqrt{m^2 + 4m + 40} + \sqrt{n^2 + 4n + 40}\right) + (14mn - 11n - 11m + 8)\sqrt{2}
\end{aligned}$$

**证明**  $v(G) = mn$  和  $e(G) = 4mn - 2n - 2m$ . 笛卡尔积图  $G$  的最小度  $\delta_c = 6$ , 最大度  $\Delta_c = m + n - 2$ , 这里具有  $(n-1)$  条边连接最大度点与  $(m+2)$  度点,  $(m-1)$  条边连接最大度点与  $(n+2)$  度点,  $(n-1)(m-1)$  条边连接最小度点与  $(m+2)$  度点,  $(n-1)(m-1)$  条边连接最小度点与  $(n+2)$  度点,  $2(n-1)(m-1)$  条边连接最小度点,  $(n-1)$  条边连接  $(m+2)$  度点,  $(m-1)$  条边连接  $(n+2)$  度点, 因此有了笛卡尔积图  $G$  的 Sombor 指标的表达式。

**定理4** 图  $G = W_n \square F_m$  的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned}
SO(G) &= 2\left(\sqrt{(m+n-2)^2 + (n+1)^2} + \sqrt{(n+1)^2 + (n+2)^2}\right) + (m-3)\sqrt{(m+n-2)^2 + (n+2)^2} \\
&\quad + (n-1)\sqrt{(m+n-2)^2 + (m+2)^2} + (14mn - 34n - 11m + 22)\sqrt{2} + 2(n-1) \\
&\quad \left(\sqrt{n^2 + 2n + 26} + \sqrt{m^2 + 4m + 29} + \sqrt{61}\right) + (n-1)(m-3)\left(\sqrt{m^2 + 4m + 40} + \sqrt{n^2 + 4n + 40}\right)
\end{aligned}$$

**证明**  $v(G) = mn$  和  $e(G) = 4mn - 3n - 2m$ . 图  $G$  的最小度  $\delta_c = 5$ , 最大度  $\Delta_c = m + n - 2$ , 这里具有 2 条边连接最大度点与  $(n+1)$  度点,  $(m-3)$  条边连接最大度点与  $(n+2)$  度点,  $(n-1)$  条边连接最大度点与  $(m+2)$  度点,  $(2n-2)$  条边连接最小度点,  $(2n-2)$  条边连接最小度点与 6 度点,  $(2n-2)$  条边连接最小度点与  $(n+1)$  度点,  $(2n-2)$  条边连接最小度点与  $(m+2)$  度点,  $(n-1)(m-3)$  条边连接  $(m+2)$  度点与 6 度点,  $(n-1)(m-3)$  条边连接  $(n+2)$  度点与 6 度点,  $(2mn - 2m - 7n + 7)$  条边连接 6 度点, 2 条边连接  $(n+1)$  度点与  $(n+2)$  度点,  $(n-1)$  条边连接  $(m+2)$  度点,  $(m-4)$  条边连接  $(n+2)$  度点, 因此能得出图  $G$  的 Sombor 指标。

**定理5** 图  $G = F_n \square F_m$  (图8) 的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned}
SO(G) &= (14mn - 35n - 34m + 48)\sqrt{2} + 2\left(\sqrt{(n+m-2)^2 + (n+1)^2} + \sqrt{(n+m-2)^2 + (m+1)^2}\right) \\
&\quad + \sqrt{(m+1)^2 + (m+2)^2} + \sqrt{(n+1)^2 + (n+2)^2} + (m-3)\sqrt{(n+m-2)^2 + (n+2)^2} + (n-3) \\
&\quad \sqrt{(n+m-2)^2 + (m+2)^2} + 4\left(\sqrt{m^2 + 2m + 17} + \sqrt{n^2 + 2n + 17}\right) + (2m-6)\left(\sqrt{m^2 + 2m + 26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\sqrt{n^2+4n+29})+(2n-6)\left(\sqrt{n^2+2n+26}+\sqrt{m^2+4m+29}\right)+(mn-3m-3n+9)\left(\sqrt{m^2-4m+40}\right. \\
& \left. +\sqrt{n^2+4n+40}\right)+(2n+2m-12)\sqrt{61}+8\sqrt{41}
\end{aligned}$$

**证明**  $v(G) = mn$  和  $e(G) = 4mn - 3n - 3m$ . 笛卡尔积图  $G$  的最小度  $\delta_c = 4$ , 最大度  $\Delta_c = m + n - 2$ , 这里具有  $(m - 3)$  条边连接最大度点与  $(n + 2)$  度点, 2 条边连接最大度点与  $(n + 1)$  度点, 2 条边连接最大度点与  $(m + 1)$  度点,  $(n - 3)$  条边连接最大度点与  $(m + 2)$  度点, 4 条边连接最小度点与  $(m + 1)$  度点,  $(2m - 6)$  条边连接 5 度点与  $(m + 1)$  度点, 2 条边连接  $(m + 2)$  度点与  $(m + 1)$  度点,  $(n - 4)$  条边连接  $(m + 2)$  度点,  $(2n - 6)$  条边连接 5 度点与  $(m + 2)$  度点,  $(mn - 3m - 3n + 9)$  条边连接  $(m + 2)$  度点与 6 度点, 4 条边连接  $(n + 1)$  度点与最小度点, 2 条边连接  $(n + 1)$  度点与  $(n + 2)$  度点,  $(2n - 6)$  条边连接  $(n + 1)$  度点与 5 度点,  $(m - 4)$  条边连接  $(n + 2)$  度点,  $(2m - 6)$  条边连接 5 度点与  $(n + 2)$  度点,  $(mn - 3m - 3n + 9)$  条边连接  $(n + 2)$  度点与 6 度点,  $(2mn - 7m - 7n + 24)$  条边连接 6 度点,  $(2n + 2m - 12)$  条边连接 6 度点和 5 度点,  $(2m + 2n - 16)$  条边连接 5 度点, 8 条边连接 5 度点与最小度点, 因此能得到图  $G$  的 Sombor 指标表达式。

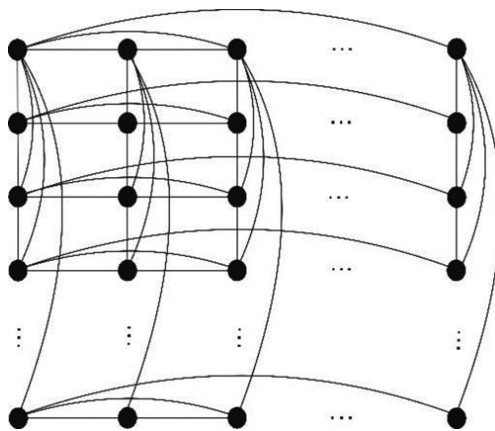


图8 扇图  $F_n$  与  $F_m$  的笛卡尔积图  $F_n \square F_m$

## 2 风筝图、杠铃图、棒棒糖图与完全图的笛卡尔积的 Sombor 指标

本章讨论风筝图  $L_{a,b}$  与完全图  $K_n$  的笛卡尔积, 杠铃图  $D_{a,b,c}$  与完全图  $K_n$  和棒棒图  $N_{a,b}$  与完全图  $K_n$  的笛卡尔积的 Sombor 指标, 并得出确切的值。

**定理 6**  $G = L_{a,b} \square K_n$  的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned}
SO(G) &= \frac{1}{2}n(2na^2 + a^3 - 6a^2 + n^2a + bn^2 - 6an + 2bn - 2n + 10a + b - 8)\sqrt{2} \\
&+ (na - a)\sqrt{2(n+a)^2 - 6(n+a) + 5} + n\sqrt{2n^2 + 2na + a^2 - 2a + 2} + n\sqrt{2n^2 + 2n + 1}
\end{aligned}$$

**证明**  $v(G) = n(a + b)$  和  $e(G) = \frac{1}{2}n(a^2 + an + bn - 2a + b)$ . 笛卡尔积图  $G$  的最小度  $\delta_c = n$ , 最大度  $\Delta_c = n + a - 1$ , 这里具有  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  条边连接最大度点,  $(na - n)$  条边连接最大度点与  $(a + n - 2)$  度点,  $n$  条边连接最大度点和  $(n + 1)$  度点,  $\frac{1}{2}n(na + a^2 - n - 4a + 3)$  条边连接  $(a + n - 2)$  度点,  $\frac{1}{2}n(bn - n + b - 3)$  条边连接  $(n + 1)$  度点,  $n$  条边连接最小度点与  $(n + 1)$  度点,  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  条边连接最小度点, 则笛卡尔积图  $G$  的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned}
SO(G) &= \frac{1}{2}n(2na^2 + a^3 - 6a^2 + n^2a + bn^2 - 6an + 2bn - 2n + 10a + b - 8)\sqrt{2} \\
&+ (na - a)\sqrt{2(n+a)^2 - 6(n+a) + 5} + n\sqrt{2n^2 + 2na + a^2 - 2a + 2} + n\sqrt{2n^2 + 2n + 1}
\end{aligned}$$

**定理 7** 图  $G = D_{a,b,c} \square K_n$  的 Sombor 指标为

$$SO(G) = \frac{1}{2}n(n^2a + n^2b + n^2c - n^2 + 2na + 2nb + 2nc - 10n + a + b + c - 13)\sqrt{2} + 6n\sqrt{2n^2 + 6n + 5}$$

**证明**  $v(G) = n(a + b + c - 1)$ 和  $e(G) = \frac{1}{2}n(na + nb + nc - n + a + b + c + 1)$ . 图  $G$  的最小度  $\delta_c = n + 1$ , 最大度  $\Delta_c = n + 2$ , 这里具有  $n(n - 1)$  条边连接最大度点,  $6n$  条边连接最大度点和最小度点,  $\frac{1}{2}n(na + a + nb + b + nc + c - 3n - 9)$  条边连接最小度点, 则图  $G$  的 Sombor 指标为

$$SO(G) = \frac{1}{2}n(n^2a + n^2b + n^2c - n^2 + 2na + 2nb + 2nc - 10n + a + b + c - 13)\sqrt{2} + 6n\sqrt{2n^2 + 6n + 5}$$

**定理 8** 图  $G = N_{a,b} \square K_n$  的 Sombor 指标为

$$SO(G) = \frac{1}{2}n(an^2 + bn^2 + 2an + 2bn + a + b - 8n - 8)\sqrt{2} + 3n\sqrt{2n^2 + 6n + 5} + n\sqrt{2n^2 + 2n + 1}$$

**证明**  $v(G) = n(a + b)$ 和  $e(G) = \frac{1}{2}n(na + nb + a + b)$ . 图  $G$  的最小度  $\delta_c = n$ , 最大度  $\Delta_c = n + 2$ , 这里具有  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  条边连接最大度点,  $3n$  条边连接最大度点与  $(\delta_c + 1)$  度点,  $\frac{1}{2}n(an + bn - 2n + a + b - 6)$  条边连接  $(\delta_c + 1)$  度点,  $n$  条边连接最小度点与  $(\delta_c + 1)$  度点,  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  条边连接最小度点, 则图  $G$  的 Sombor 指标为

$$SO(G) = \frac{1}{2}n(an^2 + bn^2 + 2an + 2bn + a + b - 8n - 8)\sqrt{2} + 3n\sqrt{2n^2 + 6n + 5} + n\sqrt{2n^2 + 2n + 1}$$

### 3 直积图的 Sombor 指标

本章讨论直积图的 Sombor 指标, 并得出一般图与正则图的直积的 Sombor 指标与它的因子图的 Sombor 指标之间的关系式。

**定理 9** 设图  $G$  为  $n$  阶  $k$ -正则图, 图  $H$  为任意图, 则有

$$SO(G \times H) = nk^2 SO(H)$$

**证明** 设  $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ,  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ,  $E(G) = \{u_i u_j | 1 \leq i, j \leq n\}$ ,  $E(H) = \{v_s v_l | 1 \leq s, l \leq m\}$ , 则  $V(G \times H) = \{u_i v_s | 1 \leq i \leq n, 1 \leq s \leq m\}$ ,  $E(G \times H) = \{(u_i v_s)(u_j v_l) | 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq s, l \leq m\}$ , 若  $d_G(u_i) = k$ , 则  $d_{G \times H}(u_i v_s) = d_G(u_i) d_H(v_s) = kd_H(v_s)$ . 令  $e_1 = (u_i v_s)(u_j v_l) \in E(G \times H)$ , 则有  $e_2 = (u_j v_s)(u_i v_l) \in E(G \times H)$ , 由此得出  $e(G \times H) = 2e(G)e(H)$ , 并且  $d_{G \times H}(u_i v_s) = d_{G \times H}(u_j v_s)$ ,  $d_{G \times H}(u_i v_l) = d_{G \times H}(u_j v_l)$ , 所以

$$SO(G \times H) = \sum_{(u_i v_s)(u_j v_l) \in G \times H} \sqrt{d_{G \times H}^2(u_i v_s) + d_{G \times H}^2(u_j v_l)} = 2k \frac{nk}{2} \sum_{v_s, v_l \in H} \sqrt{d_H^2(v_s) + d_H^2(v_l)} = nk^2 SO(H)$$

### 4 完全图、圈、路的积图的 Sombor 指标

本章将给出完全图与路、圈作直积、笛卡尔积、强积, 路和圈作直积、强积所得到图的 Sombor 指标的准确表达式, 并得出一般图的直积、笛卡尔积、强积的 Sombor 指标的关系式。

$$\text{定理 10 (1)} SO(K_n \square P_m) = 2n\sqrt{2n^2 + 2n + 1} + \left(\frac{1}{2}mn^3 + mn^2 + \frac{1}{2}mn - 4n^2 - 2n\right)\sqrt{2};$$

$$(2) SO(K_n \square C_m) = \frac{1}{2}nm(m + 1)(n + 1)\sqrt{2};$$

$$(3) SO(K_n \times P_m) = (2n^3 - 4n^2 + 2n)\sqrt{5} + (2n^3m - 4n^2m - 6n^3 + 12n^2 + 2nm - 6n)\sqrt{2}, (m > 2);$$

$$(4) SO(K_n \times C_m) = nm(m - 2)(n - 1)\sqrt{2};$$

$$(5) SO(K_n \boxtimes P_m) = 2n^2\sqrt{13n^2 - 10n + 2} + \left(\frac{9}{2}n^3m - 3n^2m - 10n^3 + 4n^2 + \frac{1}{2}nm\right)\sqrt{2}, (m > 2);$$

$$(6) SO(K_n \boxtimes C_m) = \frac{1}{2} nm(3n-1)^2 \sqrt{2};$$

$$(7) SO(P_n \times P_m) = 4\sqrt{17} + (8m+8n-48)\sqrt{5} + (8mn-24m-24n+80)\sqrt{2}, (m, n > 2);$$

$$(8) SO(C_n \times C_m) = 8mn\sqrt{2};$$

$$(9) SO(C_n \times P_m) = 8n\sqrt{5} + (8nm-12n)\sqrt{2}, (m > 2);$$

$$(10) SO(P_n \boxtimes P_m) = (32mn-78m-78n+200)\sqrt{2} + 8\sqrt{34} + 4\sqrt{53} + (6m+6n-32)\sqrt{89}, (m, n > 2);$$

$$(11) SO(C_n \boxtimes C_m) = 32mn\sqrt{2};$$

$$(12) SO(C_n \boxtimes P_m) = (32mn-78n)\sqrt{2} + 6n\sqrt{89}.$$

证明 (1) 显然  $v(K_n \square P_m) = mn$  和  $e(K_n \square P_m) = \frac{1}{2} mn^2 + \frac{1}{2} mn - n$ , 笛卡尔积图  $K_n \square P_m$  的最小度  $\delta_{K_n \square P_m} = n$ , 最大度  $\Delta_{K_n \square P_m} = n+1$ , 该图含有  $n^2 - n$  条边连接最小度点,  $2n$  条边连接最小度点与最大度点,  $(\frac{1}{2} mn^2 + \frac{1}{2} mn - n^2 - 2n)$  条边连接最大度点, 因此能得到图  $K_n \square P_m$  的 Sombor 指标表达式;

(2) 由文献<sup>[7]</sup>可知, 若图  $G$  是  $n$  阶的  $k$ -正则图, 则  $G$  的 Sombor 指标为  $SO(G) = \frac{nk^2}{\sqrt{2}}$ , 显然, 图  $K_n \square C_m$  是一

个  $mn$  阶的  $(n+1)$ -正则图, 所以  $SO(K_n \square C_m) = \frac{1}{2} nm(m+1)(n+1)\sqrt{2}$ ;

(3) 因为  $K_n \times P_m$  符合定理 10 的条件,  $K_n$  是  $n$  阶的  $n-1$ -正则图, 因此直接代入

$$\begin{aligned} SO(K_n \times P_m) &= nk^2 SO(H) = n(n-1)^2 [2\sqrt{5} + 2(m-3)\sqrt{2}] \\ &= (2n^3 - 4n^2 + 2n)\sqrt{5} + (2n^3m - 4n^2m - 6n^3 + 12n^2 + 2nm - 6n)\sqrt{2}, (m > 2); \end{aligned}$$

(4) 直积图  $K_n \times C_m$  是一个  $mn$  阶的  $(2n-2)$ -正则图, 所以  $SO(K_n \times C_m) = nm(m-2)(n-1)\sqrt{2}$ ;

(5)  $v(K_n \boxtimes P_m) = mn$  和  $e(K_n \boxtimes P_m) = \frac{3}{2} mn^2 - n^2 - \frac{1}{2} mn$ , 强积图  $K_n \boxtimes P_m$  的最小度  $\delta_{K_n \boxtimes P_m} = 2n-1$ , 最大度  $\Delta_{K_n \boxtimes P_m} = 3n-1$ , 该图有  $n^2 - n$  条边连接最小度点,  $2n^2$  条边连接最小度点与最大度点,  $(\frac{3}{2} mn^2 - 4n^2 - \frac{1}{2} mn + n)$  条边连接最大度点, 因此能得到图  $K_n \boxtimes P_m$  的 Sombor 指标表达式;

(6) 强积图  $K_n \boxtimes C_m$  是一个  $mn$  阶的  $(3n-1)$ -正则图, 所以很容易就能得出

$$SO(K_n \boxtimes C_m) = \frac{1}{2} nm(3n-1)^2 \sqrt{2}$$

(7)  $v(P_n \times P_m) = mn$  和  $e(P_n \times P_m) = 2(m-1)(n-1)$ , 直积图  $P_n \times P_m$  的最小度  $\delta_{P_n \times P_m} = 1$ , 最大度  $\Delta_{P_n \times P_m} = 4$ , 该图有 4 条边连接最小度点与最大度点, 4 条边连接 2 度点,  $(4m+4n-24)$  条边连接 2 度点和最大度点,  $(2mn-6m-6n+18)$  条边连接最大度点, 因此能得到图  $P_n \times P_m$  的 Sombor 指标表达式;

(8) 因为  $C_n \times C_m$  符合定理 10 的条件,  $C_n$  是 2-正则图, 因此直接代入  $SO(C_n \times C_m) = nk^2 SO(C_m) = n^2 2m\sqrt{2} = 8mn\sqrt{2}$ ;

(9) 因为  $C_n \times P_m$  符合定理 10 的条件,  $C_n$  是 2-正则图, 因此直接代入  $SO(C_n \times P_m) = nk^2 SO(P_m) = n^2 [2\sqrt{5} + 2(m-3)\sqrt{2}] = 8n\sqrt{5} + (8nm-12n)\sqrt{2}$ ;

(10)  $v(P_n \boxtimes P_m) = mn$  和  $e(P_n \boxtimes P_m) = 4mn - 3m - 3n + 2$ , 强积图  $P_n \boxtimes P_m$  的最小度  $\delta_{P_n \boxtimes P_m} = 3$ , 最大度  $\Delta_{P_n \boxtimes P_m} = 8$ , 该图有 8 条边连接最小度点和 5 度点, 4 条边连接最小度点与最大度点,  $(2m+2n-8)$  条边连接 5 度点,  $(6m+6n-32)$  条边连接 5 度点和最大度点,  $(4mn-11m-11n+30)$  条边连接最大度点, 因此能得到图  $P_n \boxtimes P_m$  的 Sombor 指标表达式;

(11) 强积图  $C_n \boxtimes C_m$  是一个  $mn$  阶的 8-正则图, 所以易得  $SO(C_n \boxtimes C_m) = \frac{mn8^2}{\sqrt{2}} = 32mn\sqrt{2}$ ;

(12)  $v(C_n \boxtimes P_m) = mn$  和  $e(C_n \boxtimes P_m) = 4mn - 3n$ , 强积图  $C_n \boxtimes P_m$  的最小度  $\delta_{C_n \boxtimes P_m} = 5$ , 最大度  $\Delta_{C_n \boxtimes P_m} = 8$ , 该图有  $2n$  条边连接最小度点,  $6n$  条边连接最小度点与最大度点,  $(4mn - 11n)$  条边连接最大度点, 因此能得到图  $C_n \boxtimes P_m$  的 Sombor 指标表达式。

**定理 11** 设图  $G$  是连通的非平凡图,  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \cdots \cup G_n$ , 则有

$$SO(G) > \sum_{i=1}^n SO(G_i)$$

**证明** 这里  $G_1, G_2, G_3, \cdots, G_n$  是图  $G$  的子图, 即  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \cdots \cup G_n$ , 这里图  $G_i (1 \leq i \leq n)$  的边集  $E(G_i) \neq \Phi$ ,  $E(G) = E(G_1) + E(G_2) + E(G_3) + \cdots + E(G_n)$ , 对于  $G_i (1 \leq i \leq n)$  中的任意一点  $v \in V(G_i)$ , 必有  $v \in V(G)$ , 并且  $d_G(v) \geq d_{G_i}(v)$ , 若边  $e = uv \in E(G_i)$ , 必有  $e \in E(G)$ , 在  $G_i$  中至少有一个顶点的度  $d_{G_i}(u)$  小于  $G$  中该顶点的度  $d_G(u)$ , 即  $d_G(u) > d_{G_i}(u)$ , 则  $\sqrt{d_G^2(v) + d_G^2(u)} > \sqrt{d_{G_i}^2(v) + d_{G_i}^2(u)}$ , 因为  $E(G_i) \subseteq E(G)$ , 所以  $SO(G) > SO(G_i)$ , 又因为  $E(G) = E(G_1) + E(G_2) + E(G_3) + \cdots + E(G_n)$ , 所以  $SO(G) > \sum_{i=1}^n SO(G_i)$ .

**推论 1** 设图  $G$  和图  $H$  是连通的非平凡图, 则有

$$SO(G \boxtimes H) > SO(G \times H) + SO(G \square H)$$

**证明** 因为  $G \boxtimes H = (G \times H) \cup (G \square H)$ , 所以  $E(G \boxtimes H) = E(G \times H) + E(G \square H)$ , 由定理 11 可得  $SO(G \boxtimes H) > SO(G \times H) + SO(G \square H)$ .

## 5 结论

文章对一些积图特征进行研究, 得出其 Sombor 指标的值, 并得出几类积图的 Sombor 指标之间的关系式以及与因子图的 Sombor 指标之间的关系式。通过对扇图、轮图、完全图、风筝图、杠铃图、棒棒糖图等图的笛卡尔积的 Sombor 指标的研究, 能直接得出准确 Sombor 指标值, 对完全图、路、圈等图的直积、笛卡尔积、强积的观察研究, 也能直接得出它们的 Sombor 指标值。研究各类图的拓扑指标必定有着较广阔的发展前景, 也必将得到更进一步的研究和应用。

### 参考文献:

- [1] SCHULTZ H P. Topological Organic Chemistry. 1. Graph Theory and Topological Indices of Alkanes[J]. Journal of Chemical Information and Computer Sciences, 1989, 29(03): 227-228.
- [2] GUTMAN I, TRINAJSTIĆ N. Graph Theory and Molecular Orbitals. Total  $\varphi$ -electron Energy of Alternant Hydrocarbons[J]. Chemical Physics Letters, 1972, 17(04): 535-538.
- [3] GUTMAN I. Graph Theory and Molecular Orbitals. XII. Acyclic Polyenes[J]. Journal of Chemical Physics, 1975, 62(09): 3399-3405.
- [4] DOBRYNIN A A, ENTRINGER R, GUTMAN I. Wiener Index of Trees: Theory and Applications[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2001, 66(03): 211-249.
- [5] XU K, DAS K C. On Harary Index of Graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2011, 159(15): 1631-1640.
- [6] GUTMAN I. Geometric Approach to Degree-based Topological Indices: Sombor indices[J]. Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2021, 86(01): 11-16.
- [7] SINGH R, PATEKAR S C. On the Sombor Index and Sombor Energy of M-splitting Graph and M-shadow Graph of Regular Graphs[J]. arXiv e-prints, 2022, 2205. 09480.
- [8] CRUZ R, RADA J, SIGARRETA J M. Sombor Index of Trees with at Most Three Branch Vertices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 409(15): 126-414.
- [9] TAMÁS RÉTI, DOLI T, ALI A. On the Sombor Index of Graphs[J]. Contributions to Mathematics, 2021, (03): 11-18.
- [10] MILOVANOVIC I, MILOVANOVIC E, MATEJIC M. On Some Mathematical Properties of Sombor Indices[J]. Bull. Int. Math. Virtual Inst, 2021, 11(02): 341-353.
- [11] CRUZ R, GUTMAN I, RADA J. Sombor Index of Chemical Graphs[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 399(15): 126018.



- [12] WIENER H. Structural Determination of Paraffin Boiling Points[J]. Journal of the American Chemical Society, 1947, 69(01): 17–20.
- [13] BAPAT R B, GUPTA S. Resistance Distance in Wheels and Fans[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2010, 41(01):1–13.
- [14] IMRICH W, KLAUZAR S. Product Graphs: Structure and Recognition[M]. Hoboken: Wiley-Interscience Imprint, 2000.
- [15] 严志丹. 几类直积图的均匀着色及连通度问题[D]. 兰州: 兰州大学, 2011.
- [16] 李钊. 一些乘积图和完全二部图的k-路顶点覆盖[D]. 天津: 天津师范大学, 2019.
- [17] FARAHANI M R, JAMIL M K, KANNA M R R, et al. The Wiener Index and Hosoya Polynomial of the Subdivision Graph of the Wheel  $S(W_n)$  and the Line Graph Subdivision Graph of the Wheel  $L(S(W_n))$ [J]. Applied Mathematics, 2016, 6(02): 21–24.

## Sombor Index of Several Kinds of Product Graphs

ALIMIRE·Tuerhong, MAITUROUZI·Maisidike\*, LIU Zhao-zhi

(School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang, 830017, China)

**Abstract:** Sombor index is a new topological index based on vertex degree introduced by Gutman in Chemical Graph Theory. In this paper, Sombor indices of cartesian products of path  $P_n$  with fan graph  $F_m$  and wheel graph  $W_m$ , wheel graph  $W_n$  with fan graph  $F_m$  and wheel graph  $W_m$ , fan graph  $F_n$  with fan graph  $F_m$ , and lollipop graph  $N_{a,b}$ , barbell graph  $D_{a,b,c}$  and kite graph  $L_{a,b}$  with complete graph  $K_n$  are discussed, Sombor indices of Direct products, Cartesian products and Strong products of complete graph, path and cycle are also studied and the exact index values and some relations of sombor indices about product graph are obtained.

**Keywords:** Sombor index; Cartesian product; Direct product; Strong product

(上接第9页)

## Bayes Estimation of the Shape Parameter of Pareto Distribution under the Gradually Increasing of Type II Truncation

ZHAO Meng-ru, ZHOU Ju-ling\*

(School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang, 830017, China)

**Abstract:** Based on gradually increasing type II truncated samples. Firstly, obtain the maximum likelihood estimation of the Pareto distribution shape parameter, considering the two loss functions and the two prior distributions of shape parameters, four Bayes estimation of the distribution shape parameter is concluded. It is found from the numerical simulation results that the mean square error of the four Bayes estimates is less than the maximum likelihood estimate. Among them, when the loss function is a quadratic loss function and the prior distribution of the shape parameter is a conjugate prior distribution, the mean square error of the Bayes estimate is smaller, and the estimation effect is more ideal, and the example analysis is consistent with the numerical simulation results. Secondly, under the quadratic loss function, the conjugate prior distribution is selected for the prior distribution of the shape parameters, and the multi-layer Bayes estimation and E-Bayes estimation of the shape parameters of the Pareto distribution are given.

**Keywords:** Gradually increasing of type II truncation; Pareto distribution; Quadratic loss; Q-symmetric entropy loss; Bayes estimates